
Ökologische Effizienzanalyse anhand nicht- parametrischer Methoden (DEA)

*Masterseminar WT 2019
an der Professur für Wandel und Nachhaltigkeit*





Ablauf des Seminars

Termin Dienstag: 14:45	Inhalt
15.01.2019	Theoretische Einführung <i>nicht-parametrische Methoden</i> Teil I
22.01.2019	Theoretische Einführung <i>nicht-parametrische Methoden</i> Teil II Wissenschaftstheorie und Prüfungsleistung
29.01.2019	Praktische Einführung in STATA Teil I (PC-Pool 4 in 46/104)
05.02.2019	Praktische Einführung in STATA Teil II (PC-Pool 4 in 46/104)
Ca. 12.03.2019	!Einzeltermine zu: <i>Zwischenstand, Problemen, Fragen</i> (bitte eine Woche vorher vereinbaren: alexander.kaiser@unibw.de)
29.03.2019	Deadline Exposé

Erste Schritte: Produktion

Input:
Produktionsfaktoren



Produktion:
Kombination und
Transformation



Output:
Ausbringungsmenge
von Produkten

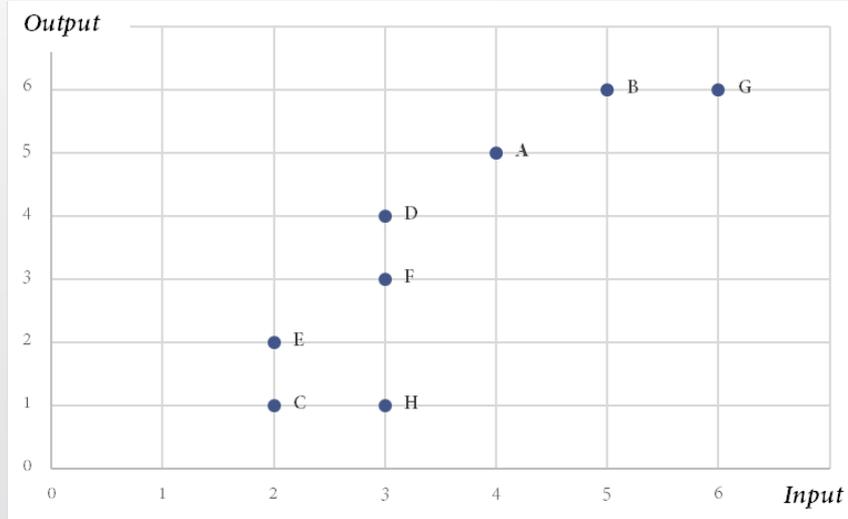


...

Produktionsfunktionen (1/2)

Effizienzmessung im Kontext eines Produktionszusammenhangs:

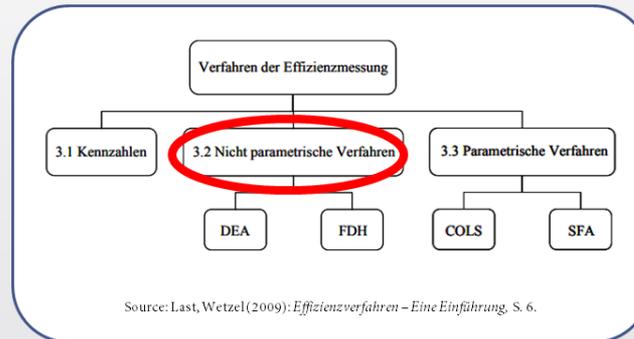
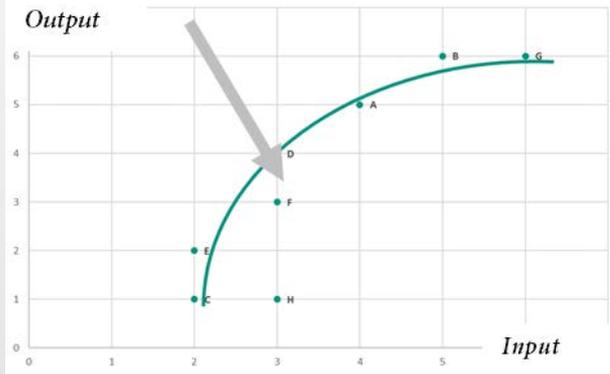
Firma	Input	Output
A	4	5
B	5	6
C	2	1
D	3	4
E	2	2
F	3	3
G	6	6
H	3	1



- Das Verhältnis aus der Anzahl an produziertem Output Y zur Anzahl an benötigtem Input X bezeichnet man als Produktivität.
- Der Vergleich der Produktivitäten zueinander gilt als Effizienzmessung
- Output Y / Input X stellt somit die einfachste Kennzahl im Vergleich der Effizienz oben dargestellter Firmen dar.
Aber: Es ist möglich, dass es ab einer gewissen Menge an Inputs einfacher / schwieriger ist Outputs zu generieren.

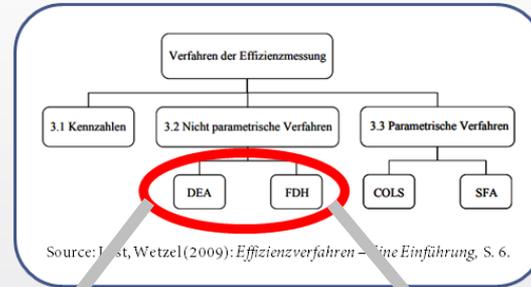
Produktionsfunktionen (2/2)

Dieser Zusammenhang lässt sich mit einer *Produktionsfunktion* abbilden:



- Eine Produktionsfunktion bildet die *funktionale Spezifikation* eines Produktionszusammenhangs ab (Die Produktionsfunktion erklärt den Zusammenhang zwischen Inputs und Outputs)
- Die Produktionsfunktion kann mit *parametrischen* (ökonometrischen) oder *nicht-parametrischen* Methoden gebildet werden
- Hauptunterschied ist, dass bei parametrischen Verfahren die der Produktion zu Grunde liegende Funktion stochastisch (z.B. via Kleinste-Quadrate-Methode) geschätzt wird, während sie bei *nicht-parametrischen Verfahren* anhand der *Beobachtungen berechnet* wird.

Unterscheidung nicht-parametrischer Verfahren



Data Envelopment Analysis (DEA):

- **A priori Spezifikation der Skalenerträge**
- Technologie: Stetige Produktionsfunktion

Varianten:

- **CCR-Modell**
- **BCC-Modell**
- **DDF-Modell**

Free Disposal Hull (FDH):

- **Keine Spezifikation der Skalenerträge**
- Technologie: Diskrete Treppenfunktion

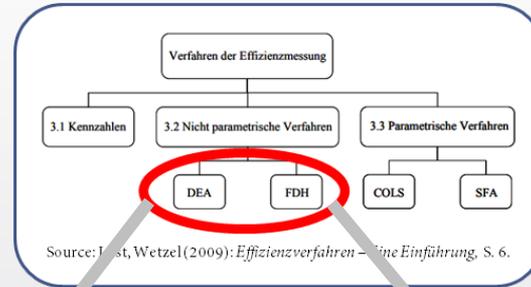
Varianten:

- **Order-m Analysis**
- **Orderalpha Analysis**

Nicht-parametrische Verfahren und Zeitreihen:

- **Malmquist Productivity Index**
- **Malmquist-Luenberger Productivity Index**

Unterscheidung nicht-parametrischer Verfahren



Data Envelopment Analysis (DEA):

- **A priori Spezifikation der Skalenerträge**
- Technologie: Stetige Produktionsfunktion

Varianten:

- CCR-Modell
- BCC-Modell
- DDF-Modell

Free Disposal Hull (FDH):

- **Keine Spezifikation der Skalenerträge**
- Technologie: Diskrete Treppenfunktion

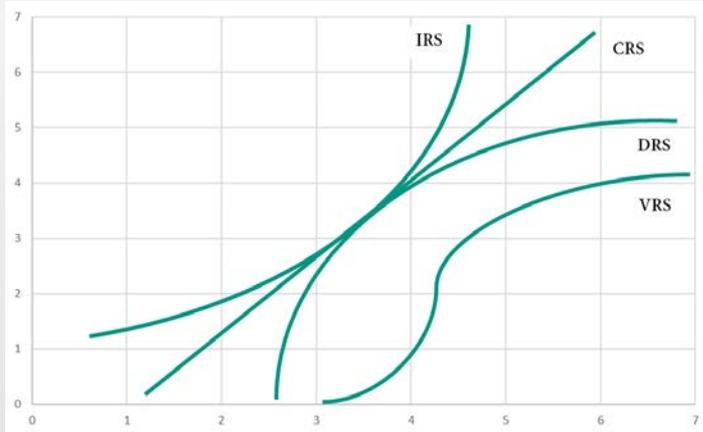
Varianten:

- Order-m Analysis
- **Orderalpha Analysis**

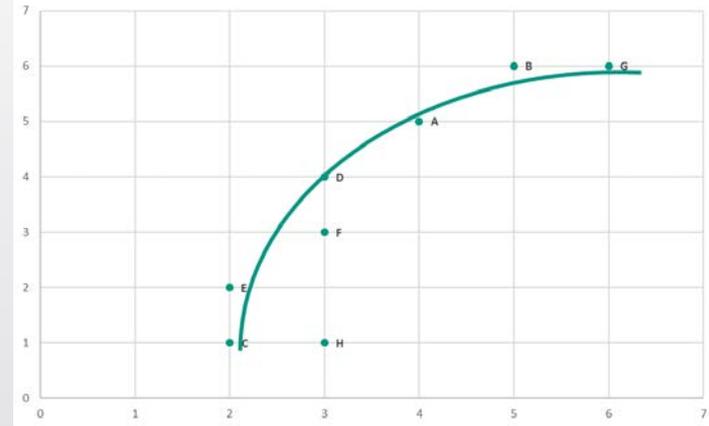
Nicht-parametrische Verfahren und Zeitreihen:

- Malmquist Productivity Index
- Malmquist-Luenberger Productivity Index

Produktionsfunktionen und Skalenerträge

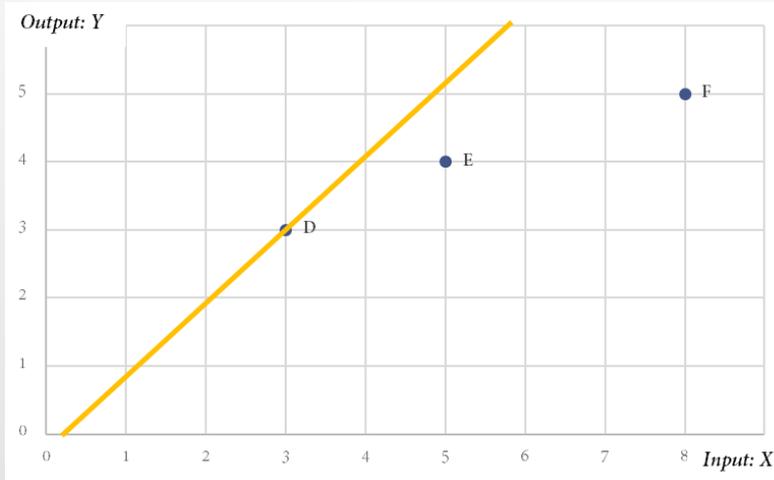


IRS und CRS bilden den vorliegenden Zusammenhang weniger gut ab als DRS oder VRS



- Bei nicht-parametrischen Methoden wird auf eine ökonometrische Schätzung der Produktionsfunktion verzichtet.
- Bei der **Data-Envelopment Analysis** müssen **a priori Skalenerträge** zugewiesen werden.
- Man unterscheidet konstante Skalenerträge (CRS), steigende (IRS), abnehmende (DRS) und variable Skalenerträge (VRS). Eine erste Einschätzung kann z.B. im Falle eines Inputs und eines Outputs graphisch erfolgen.

Grundlagen: Performancemessung und DEA (1/8)



1. Fall: Ein Input, ein Output
und konstante Skalenerträge (CRS)

Produktivität der Referenz-DMU D :

$$\frac{Y}{X} = 1.0$$

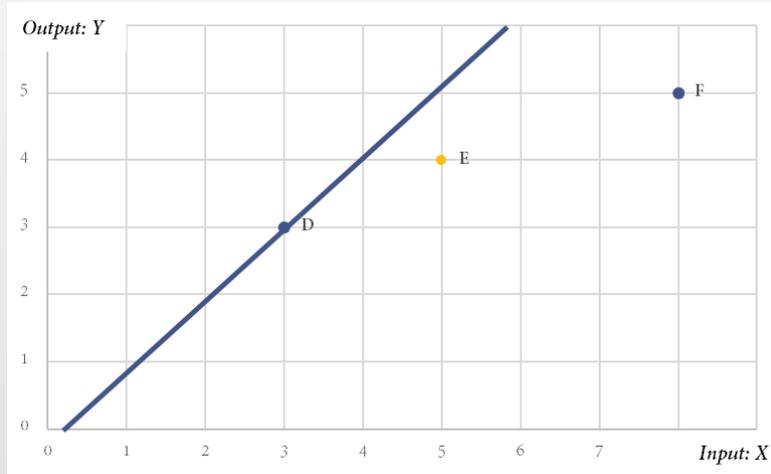
Efficiency Score DMU E :

$$\theta = \frac{\text{Produktivität DMU E}}{\text{Produktivität Referenz DMU}}$$

$$\theta = \frac{0.8}{1.0} = 0.8$$

- Die Beobachtungen (hier: D, E, F) werden in der DEA-Literatur als *Decision Making Unit*, kurz *DMU* bezeichnet
- Die *Efficiency-Frontier* gibt die gerade noch möglichen (effizienten) Input-Output Kombinationen für die spezifizierten Skalenerträge (hier: CRS) an. Sie wird mit Hilfe der produktivsten DMUs gebildet und *dient als Referenz für alle DMUs*, welche die Efficiency Frontier einschließt (*enveloped*) und dabei nicht selbst in ihr enthalten sind
- Im Fall konstanter Skalenerträge wird der *Efficiency-Score (Theta)* einer bestimmten DMU aus dem Verhältnis ihrer Produktivität zur Produktivität der ihr zugewiesenen *Referenz-DMU* (hier: D für Alle) berechnet

Grundlagen: Performancemessung und DEA (2/8)



1. Fall: Ein Input, ein Output
und konstante Skalenerträge (CRS)

Produktivität der Referenz-DMU D :

$$\frac{Y}{X} = 1.0$$

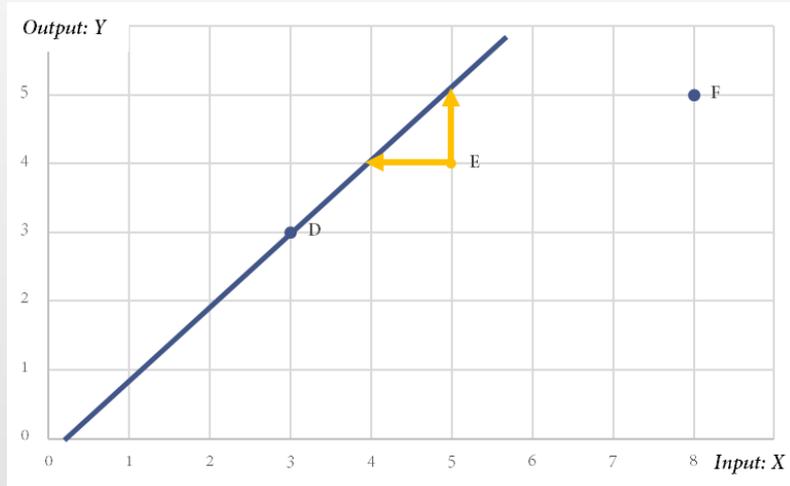
Efficiency Score DMU E :

$$\theta = \frac{\text{Produktivität DMU E}}{\text{Produktivität Referenz DMU}}$$

$$\theta = \frac{0.8}{1.0} = 0.8$$

- Da der Efficiency Score aus dem Verhältnis zweier identisch skalierte Kennzahlen berechnet wird können mit der DEA Szenarien beurteilt werden in denen unterschiedlich skalierte oder in physischen Einheiten gegebene Variablen auftreten (unit invariance)
- Alle DMUs mit $\theta = 1$ konstituieren die Efficiency Frontier. Zudem gilt: $0 \leq \theta \leq 1$

Grundlagen: Performancemessung und DEA (3/8)



1. Fall: Ein Input, ein Output
und konstante Skalenerträge (CRS)

Produktivität der Referenz-DMU D :

$$\frac{Y}{X} = 1.0$$

Efficiency Score DMU F :

$$\theta = \frac{\text{Produktivität DMU E}}{\text{Produktivität Referenz DMU}}$$

$$\theta = \frac{0.8}{1.0} = 0.8$$

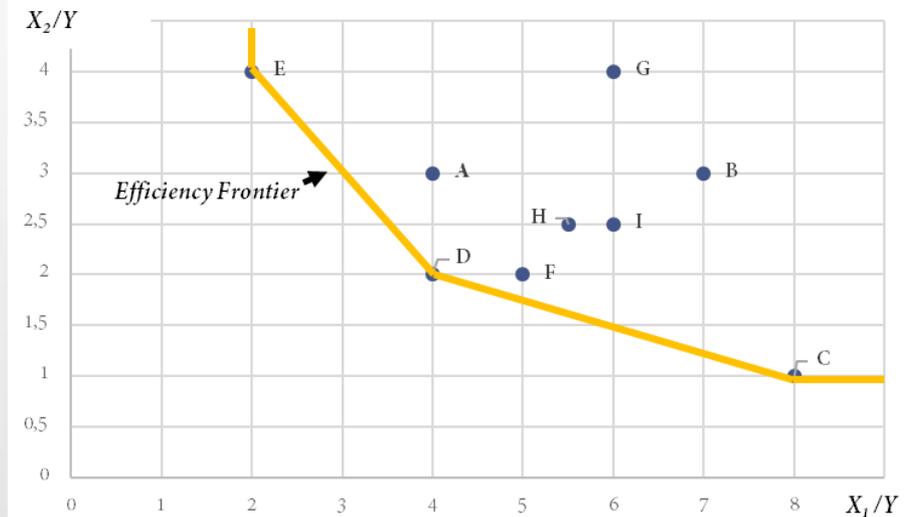
- „In gegebener Produktionssituation ist DMU E also zu 80% effizient“
- DMU E hat zwei mögliche Optionen um effizient zu werden und zur Referenz-DMU aufzuschließen: E_{IN} , oder E_{OUT}
- E_{IN} : DMU E reduziert den Einsatz an Inputs bei gleichbleibendem Output um eine Einheit
- E_{OUT} : DMU E produziert mit demselben Inputeinsatz eine Einheit Output zusätzlich
- Theoretisch wäre auch eine Kombination beider Strategien möglich, sofern Inputs und Outputs nicht diskret sind

Grundlagen: Performancemessung und DEA (4/8)

2. Fall: 2 Inputs, 1 Output
und konstante Skalenerträge (CRS)

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I
X1	4	7	8	4	2	5	6	5.5	6
X2	3	3	1	2	4	2	4	2.5	2.5
Y	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Zur besseren zweidimensionalen Veranschaulichung
entsprechen Y / X_1 und Y / X_2 den Inputwerten X_1 und X_2



- Die DMUs E, D und C gelten als effizient, da sie keinen produktiveren Referenzpunkt als sich selbst haben (Würde DMU C Input X_1 auf das Level von DMU D reduzieren wollen müsste sie eine Einheit X_2 zusätzlich einsetzen)
- Über das Verhältnis der Wertigkeit von X_1 zu X_2 können wir im abstrakten Fall nicht bestimmen (unit invariance). Folglich akzeptieren wir die Inputkombinationen von DMU E, D und C als effizient und als den Trade-Off, welcher die Produktionsmöglichkeiten in der hier empirisch beobachteten Produktionssituation begrenzt

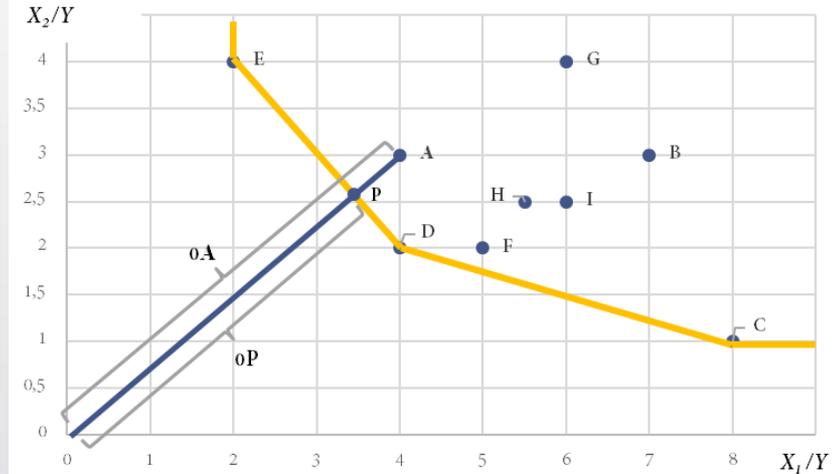
Grundlagen: Performancemessung und DEA (5/8)

2. Fall: 2 Inputs, 1 Output
und konstante Skalenerträge (CRS)

$$\theta_A = \frac{oP}{oA} \approx 0.86$$

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I
X1	4	7	8	4	2	5	6	5.5	6
X2	3	3	1	2	4	2	4	2.5	2.5
Y	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Zur besseren zweidimensionalen Veranschaulichung entsprechen Y / X_1 und Y / X_2 den Inputwerten X_1 und X_2



- Die Ineffizienz von DMU A wird jetzt mit Hilfe von 2 Punkten bestimmt. DMU E und DMU D sind also DMU A's *Referenz-Set*
- Der Effizienzscore wird berechnet indem DMU A auf den Ursprung projiziert wird. Der entstandene Schnittpunkt wird mit dem Abstand des Punkts zum Ursprung ins Verhältnis gesetzt.

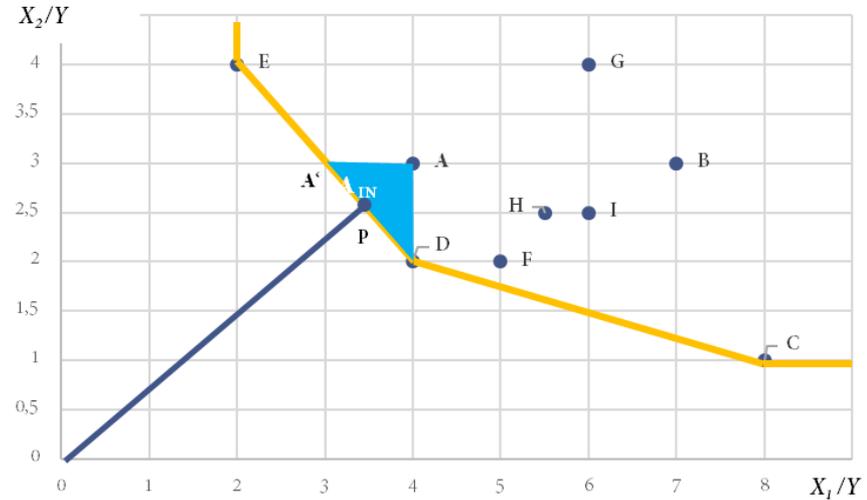
Grundlagen: Performancemessung und DEA (6/8)

2. Fall: 2 Inputs, 1 Output
und konstante Skalenerträge (CRS)

$$\theta_A = \frac{oP}{oA} \approx 0.86$$

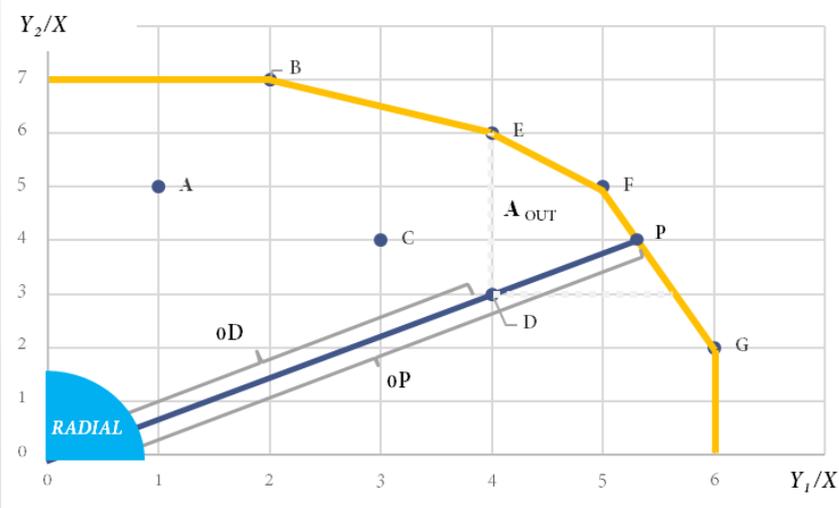
DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I
X1	4	7	8	4	2	5	6	5.5	6
X2	3	3	1	2	4	2	4	2.5	2.5
Y	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Zur besseren zweidimensionalen Veranschaulichung entsprechen Y / X_1 und Y / X_2 den Inputwerten X_1 und X_2



- „In gegebener Produktionssituation ist DMU A also zu 86% effizient“ (!Nur, weil der Wert für Y für alle DMUs identisch ist)
- DMU A hat zwei mögliche Optionen um effizient zu werden und zum Referenz-Set aufzuschließen: A_{IN} , oder A_{OUT}
- A_{IN} : DMU A reduziert den Einsatz an Inputs bei gleichbleibendem Output auf eine Inputkombination der Strecke DA'
- A_{OUT} : ist vorliegend keine Option, da alle DMUs einen identischen Output Wert aufweisen

Grundlagen: Performancemessung und DEA (7/8)



3. Fall: 1 Input, 2 Outputs
und konstante Skalenerträge (CRS)

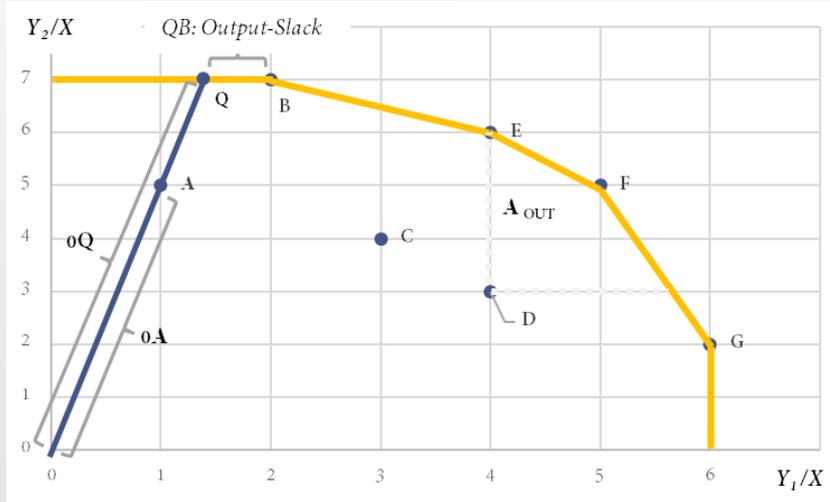
$$\theta_D = \frac{oD}{oP} \approx 0.75$$

DMU	A	B	C	D	E	F	G
X	1	1	1	1	1	1	1
Y1	1	2	3	4	4	5	6
Y2	5	7	4	3	6	5	2

Zur besseren zweidimensionalen Veranschaulichung entsprechen Y_1 / X und Y_2 / X_2 den Output Werten Y_1 und Y_2

- Invertierte Berechnung zum 2 Inputs, 1 Output- Fall
- Da der Ursprung als Ausgangspunkt für alle resultierenden Distanzfunktionen fungiert, nennt man diese Art der Effizienzmessung auch radial.
- DMU D ist „technisch ineffizient“, da es möglich wäre beide Outputs zu erhöhen ohne ihr Verhältnis (Proportion) zu verändern

Grundlagen: Performancemessung und DEA (8/8)



3. Fall: 1 Inputs, 2 Outputs
und konstante Skalenerträge (CRS)

$$\Theta_A = \frac{0A}{0Q} \approx 0.714$$

DMU	A	B	C	D	E	F	G
X	1	1	1	1	1	1	1
Y1	1	2	3	4	4	5	6
Y2	5	7	4	3	6	5	2

Zur besseren zweidimensionalen Veranschaulichung entsprechen Y_1 / X und Y_2 / X_2 den Output Werten Y_1 und Y_2

- Sonderfall DMU A: In diesem Fall gibt es eigentlich kein Referenzset, lediglich eine Referenz DMU B.
- Würde DMU A zum Punkt Q aufschließen wäre sie „technisch effizient“, genau genommen aber ineffizient verglichen mit Referenz DMU B. Bei der gleichen Anzahl an Input und Output Y_2 produziert DMU B mehr (QB) von Output Y_1
 → Diese Ineffizienz, welche durch die radiale Messung verschleiert wird bezeichnet man als *Slacks*.

DEA- Modelle (1/5): CCR (Charnes, Cooper, Rhodes)

Bisherige Betrachtung beschränkte sich auf Fälle mit entweder: „1 Input, 2 Outputs“ mit identischen Inputwerten, oder umgekehrt. In der Realität sind jedoch Produktionen die Regel bei denen mehrere verschiedene Inputs und, oder Outputs beteiligt sind, welche von DMU zu DMU in ihrer Zusammensetzung und Anzahl abweichen.

Verschiedene Inputs weisen i.d.R. auch unterschiedliche Einheiten, oder Skalierungen auf. Da die DEA aber ein Maximierungsproblem anhand der vorliegenden Daten löst, ist eine a priori Zuweisung von „weights“ zu den Variablen nicht nötig. Die „weights“ fließen als Unbekannte in das Maximierungsproblem mit ein.

Für jede DMU wird also ein virtueller Input und virtueller Output bei noch unbekannter Gewichtung („weights“) benötigt. Die Gewichtung resultiert aus der Maximierung von:

$$\frac{\text{Virtueller Input}}{\text{Virtueller Output}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \text{Virtual Input:} \quad = v_1 x_{10} + \dots + v_m x_{m0} \\ \text{Virtual Output:} \quad = u_1 y_{10} + \dots + u_s y_{s0} \end{array}$$

In „mathematischer“ Schreibweise resultiert folgendes lineares Programm:

$$(LP_o) \quad \max_{\mu, v} \theta = \mu_1 y_{10} + \dots + \mu_s y_{s0}$$

Für Herleitung und Annahmen siehe Cooper et al., 2007, S. 23f.

DEA- Modelle (2/5): CCR (Charnes, Cooper, Rhodes)

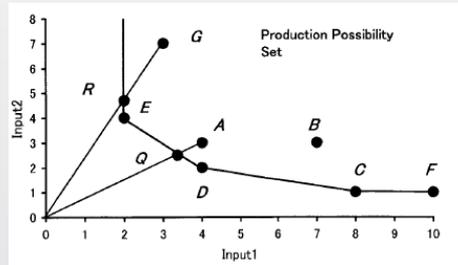
Variablen: x_1, x_2, y

Im CCR Modell immer: CRS (konst. SE)

Optionen, werden später bei der Eingabe in STATA spezifiziert

DMU	A	B	C	D	E	F	G
Input x_1	4	7	8	4	2	10	3
Input x_2	3	3	1	2	4	1	7
Output y	1	1	1	1	1	1	1

Output gefixt zur graphischen Darstellung

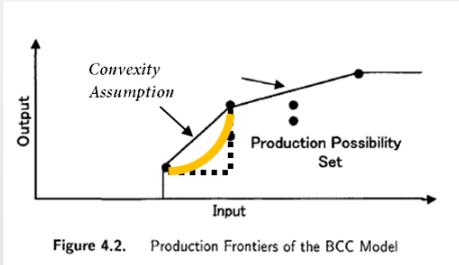
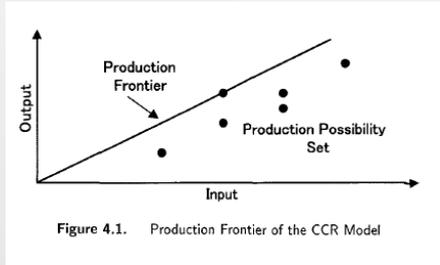


DMU	CCR-Eff θ^*	Ref Set	Excess s_1^-	Excess s_2^-	Shortfall s^+
A	0.8571	D E	0	0	0
B	0.6316	C D	0	0	0
C	1.0000	C	0	0	0
D	1.0000	D	0	0	0
E	1.0000	E	0	0	0
F	1.0000	C	2	0	0
G	0.6667	E	0	.6667	0

- Ausgabe der CCR DEA umfassen den „Efficiency Score“, das Reference Set, die Slacks für Input 1 & 2 (s^-), sowie Output (s^+)
- Diese Slacks werden graphisch nur ersichtlich, wenn eine Darstellung aufgrund identischer Werte für den Output möglich ist
- Weist eine DMU den Wert = 1 auf ist sie mindestens radial effizient (, oder auch technisch effizient)
- Weist eine DMU den Wert = 1 auf und die Summe aller Slacks (Exzesse) ist 0, dann ist sie CCR-effizient (, oder auch Pareto-Koopmans-effizient)

DEA- Modelle (3/5): BCC (Banker, Charnes, Cooper)

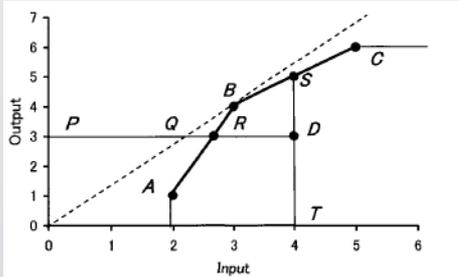
Die Annahme konstanter Skalenerträge trifft nicht auf jede Produktionssituation zu. Das BCC Modell ergänzt die CCR-DEA um die sog. „convexity assumption“, also dass sich die Skalenerträge variabel entwickeln (die Efficiency Frontier verläuft konkav)



Variablen: Input, Output

Im BCC Modell immer: VRS (variable SE)

Orientierung
(Im BCC Modell kann festgelegt werden ob die Inputs zu den gefixten Outputs oder umgekehrt maximiert werden sollen)



DEA- Modelle (4/5): BCC (Banker, Charnes, Cooper)

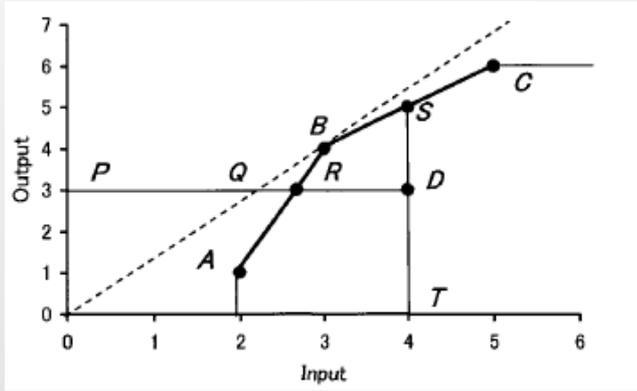
Variablen: Input, Output

Im BCC Model immer: VRS (variable SE)

Input-Orientierung

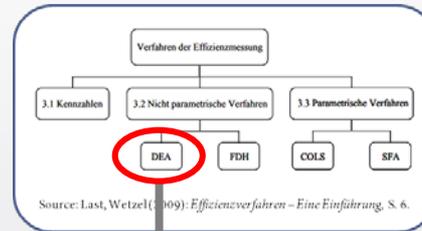
$$\Theta_D^{IN} = \frac{PR}{PD} \approx 0.6667$$

Output-Orientierung

$$\Theta_D^{OUT} = \frac{ST}{DT} \approx 1.6667$$


- B ist als einzige DMU auch CCR effizient.
- Generell gilt, dass der CCR-Efficiency Score keine größeren Werte als der BCC Efficiency Score annimmt
- Je nach Wahl der Orientierung berechnet sich im 1 Input und 1 Output Fall der Efficiency Score nach den vertikalen, oder horizontalen Distanzstrecken
- Ob als Option Input-, oder Outputorientierung spezifiziert wird, hängt vom Interesse der Arbeit ab

DEA- Modelle (5/5): Erweiterungen



Additive Model:

- Vereinfacht:
„Addiert Input- und Output-Slacks“
- Berechnet keinen Score

Slacks-based measure (SBM):

- Units und Dimension-invariant

Directional Distance Function (DDF):

- nicht-radial
- bildet kürzeste Distanz zur Frontier

Multidirectional Efficiency Analysis:

- basiert auf DDF
- Gibt absolute Wertekombinationen an
- Macht die Gewichtung von Inputs und Outputs über absolute Werte transparent
- Sinnvoll um Bedeutung eines bestimmten Inputs bzw. Outputs im Produktionszusammenhang zu messen



Gruppeneinteilung und Themenvergabe

Bis zum nächsten Mal:

- *Findet euch in zwei 2er und zwei 3er Gruppen zusammen*
- *Sucht ein Thema mit Bezug zu Effizienz und Nachhaltigkeit, zu dem Datensätze verfügbar sind und zu dem eine nicht-parametrische Methode angewendet werden kann*
- *Die Gruppeneinteilung und das grobe Thema wird dann nächstes Mal festgehalten*